

## Pratique Supplémentaire 7

Cette série fait suite aux chapitres 4.3, 4.4, 4.5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

**Remarques :** il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

### Exercice 1

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $B$  une matrice de taille  $n \times p$  telles que

$$\text{Ker}A \cap \text{Col}B = \{\vec{0}\}.$$

Soit  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ ,  $k \leq n$ , une base de  $\text{Col}B$ . Montrer que  $\{A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_k\}$  est une base de  $\text{Col}(AB)$ .

### Exercice 2

Vous pouvez ignorer la partie (b), qui est longue à résoudre sans connaître les propriétés spéciales des matrices de Vandermonde.

a) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a & 6 \end{pmatrix}$ . Calculer le noyau et l'image de  $A$  en fonction des valeurs du paramètre réel  $a$ . Déterminer quand la matrice  $A$  est inversible.

b) Calculer le noyau et le rang de la matrice de Vandermonde  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

en fonction des valeurs du paramètre réel  $a$ .

### Exercice 3

La notation ci-dessous est un peu différente de la notation qu'on utilise en classe.

Soient  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$  deux bases d'un espace vectoriel  $V$ . Supposons que  $b_1 = 6c_1 - 2c_2$  et  $b_2 = 9c_1 - 4c_2$ .

(a) Calculer la matrice de changement de base  $P = (\text{Id}_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$ .

(b) Trouver  $(x)_{\mathcal{C}}$  pour  $x = -3b_1 + 2b_2$  en utilisant le résultat en (a)

Soient  $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$  et  $\mathcal{D} = \{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  deux bases de  $\mathbb{R}^2$ .

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) Calculer la matrice de changement de base  $P = (\text{Id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}}$  de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{D}$ .

(d) Calculer la matrice de changement de base  $Q = (\text{Id})_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{D}$  vers  $\mathcal{A}$ .

#### Exercice 4

Dans  $\mathbb{P}_2$ , calculer la matrice de changement de base de la base

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

vers la base canonique  $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ . Puis écrire les coordonnées du vecteur  $p = -1 + 2t$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

#### Exercice 5

1. Soit  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

a) Donner la matrice  $A$  de l'application linéaire  $T$  par rapport aux bases canoniques  $E$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

b) Donner la matrice  $B$  de l'application linéaire  $T$  par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

2. Soit  $T: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  l'application linéaire définie par  $T(C) = X \cdot C$ , où  $X$  est la matrice de taille  $2 \times 2$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Donner la matrice  $A$  de l'application linéaire  $T$  par rapport à la base canonique de  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

b) Donner la matrice  $B$  de l'application linéaire  $T$  par rapport à la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

On cherche  $B = ([T(B_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_3)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_4)]_{\mathcal{B}})$ .

### Exercice 6

a) Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ .

$\text{Ker}A$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^4$  de dimension 0.

$\text{Ker}A$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$  de dimension 0.

$\text{Ker}A$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^4$  de dimension 1.

$\text{Ker}A$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$  de dimension 1.

b) On considère les polynômes  $p(t) = (1-t)(1+t) = 1-t^2$  et  $q(t) = (1+t)(1+t) = 1+2t+t^2$  de  $\mathbb{P}_2$ .

Les polynômes  $p$  et  $q$  sont linéairement indépendants.

Les polynômes  $p$  et  $q$  forment une base de  $\mathbb{P}_2$ .

Le polynôme  $q-p$  est le polynôme nul.

$(1+t)p - (1-t)q$  est une combinaison linéaire de  $p$  et  $q$ .

c) Soit  $W$  l'hyperplan dans  $\mathbb{R}^6$  donné par l'équation  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$ . On

considère les vecteurs  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

On peut compléter  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  en une base de  $W$  composée de 5 vecteurs.

On peut compléter  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  en une base de  $W$  composée de 6 vecteurs.

On peut compléter  $\{\vec{a}, \vec{c}\}$  en une base de  $W$  composée de 5 vecteurs.

On peut compléter  $\{\vec{a}, \vec{c}\}$  en une base de  $W$  composée de 6 vecteurs.

d) Soit  $V$  un espace vectoriel et  $v_1, \dots, v_k$  des vecteurs de  $V$ .

Si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  est libre, alors  $\dim V = k$ .

Si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  est libre, alors  $\dim V \geq k$ .

Si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  engendre l'espace vectoriel  $V$ , alors  $\dim V = k$ .

Si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  engendre l'espace vectoriel  $V$ , alors  $\dim V \geq k$ .

e) Soit  $\text{Tr}: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  l'application linéaire "trace" définie par

$$\text{Tr} \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = a + d.$$

- Le noyau de  $\text{Tr}$  est un sous-espace de  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  de dimension 1.
  - Le noyau de  $\text{Tr}$  est un sous-espace de  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  de dimension 2.
  - Le noyau de  $\text{Tr}$  est un sous-espace de  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  de dimension 3.
  - Le noyau de  $\text{Tr}$  est un sous-espace de  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  de dimension 4.
- f) Soit  $\text{Tr}: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  l'application linéaire "trace" définie à la question f. Les matrices suivantes forment une base du noyau de  $\text{Tr}$  :
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .
  - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .
  - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .
  - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .
-